

РАЗВОЈ МАТЕМАТИЧКОГ СОФТВЕРА ЗА ИСПИТИВАЊЕ ТОКА И ЦРТАЊЕ ГРАФИКА ФУНКЦИЈЕ

Тања Крунић¹

Резиме: У оквиру овог рада је представљен развој софтвера за анализу тока и цртање графика функције. Софтвер је намењен за примену у настави математике у средњим и високим школама, као помоћно наставно средство. По завршетку развоја, намера је да софтвер буде јавно доступан за употребу. Основна разлика између овог и већ постојећих софтвера који служе за цртање графика функције је у томе што овај софтвер као резултат исписује на екрану све кораке анализе тока функције, на исти начин на који се то очекује од ученика, односно студената. Управо због тога може да послужи ученицима за проверу тачности решења задатака, али и наставницима за креирање већег броја задатака из ове области са детаљним решењима.

Кључне речи: Математика, Wolfram Mathematica, математички софтвер, анализа тока и график функције

THE DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL SOFTWARE FOR ANALYZING AND DRAWING THE GRAPH OF A FUNCTION

Abstract: This paper presents the development of a mathematical software for analyzing and drawing the graph of a function. The software is intended to be used as a teaching aid for mathematics in high schools and colleges. After finishing development, the software is intended to be free for use. The main difference between this and other similar software for drawing functions is the fact that this software prints out results in exactly the same format as is expected from students. This is why this software can help students verify the results of their exercises. Besides, it can help teachers create numerous exercises with detailed results in this field.

Key words: Mathematics, Wolfram Mathematica, mathematical software, analyzing and drawing the graph of a function

1. УВОД

Математика је природна наука коју је чувени научник Карл Фридрих Гаус назвао краљицом свих наука. Математика ову титулу носи јер без знања математике не би постојале ни друге природне науке као што је нпр. физика или механика које се ослањају на математичка знања. Примена математичког моделирања се показала као један од значајнијих фактора у развоју нових технологија, [1]. Стога је за развој науке и технологије изузетно важно да будући инжењери из разних области успешно савладају математику. Да би се ово постигло, важно је да ученици и студенти буду успешни из математике од самог почетка: почев од основне школе, па до факултета. Разлог томе је што се градиво математике надовезује једно на друго, па се недостатак знања из једне области математике често преноси даље на другу област, те тако настаје све већи јаз у знању. У данашње време, информационе технологије нуде бројне могућности да се математика приближи ученицима, тј. да им градиво буде интересантније, те да га тако лакше разумеју и савладају.

У другом поглављу је описана улога примене информационих технологија у настави математике. Поменуто су предности, али и ограничења за њихову примену. Такође, наведени су неки од популарних математичких програма који се тренутно користе. Неки од њих имају могућност да цртају графике функција. Поред тога, описани су неки, већ постојећи софтвери који су написани за испитивање тока и цртање графика функције. Потом је представљен програмски пакет *Mathematica* у којем се развија софтвер за испитивање тока и цртање графика функције. Поменути софтвер је тренутно још у фази развоја, а описан је у трећем поглављу.

¹ др, Висока техничка школа струковних студија у Новом Саду, Школска 1, krunic@vtsns.edu.rs

Наведене су разлике овог софтвера у односу на друге, већ постојеће софтвере сличне намене. Софтвер је намењен ученицима средњих школа и студентима, као и њиховим наставницима.

2. ПРИМЕНА ИНФОРМАЦИОНИХ ТЕХНОЛОГИЈА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Примена информационих технологија у настави математике има одређене предности и ограничења, о чему ће бити речи у наставку.

2.1. Предности примене информационих технологија у настави математике

Примена информационих технологија у настави математике може знатно помоћи студентима у решавању одређених проблема. Тако на пример, примена геометријског програмског пакета може помоћи ученицима и студентима да разумеју, реше и провере тачност добијеног решења неког проблема, [2]. Према истом извору, главна улога примене информационих технологија је да наставници и студенти постану вештији у решавању математичких проблема, као и да се ствара креативно радно окружење за учење. При томе се развија критичко мишљење и размена идеја. Аутор овог рада такође истиче да професори математике и других природних наука имају позитивнији став о примени информационих технологија у настави од наставника других области (ово се нарочито односи на друштвено – хуманистичке науке). Из ове чињенице се може закључити да је управо настава математике погодна за имплементацију информационих технологија. Поред осталих предности које доноси примена информационих технологија у настави математике, у [3] се наводи утицај на повећање заинтересованости ученика, односно студената за учење математике. Такође се наводи и подстицај за доживотно учење. Према [4]-[6], међу најпознатије математичке програме се убрајају *Mathematica*, *Maple*, *MatLab*, *MathCAD*, *Magma*, *Maxima*, *Sage*, *MuPAD*, *Singular*, *CoCoA*, *Dynamic Solver*, *Microsoft Mathematics*, *Cadabra*, *GeoGebra*, *Photomath*, *SpeQ Mathematics*, *xFunc*, *Gap*, *MathSolver*, *Math Editor*, и др. У [7] се може видети успешан пример примене програмског пакета *Mathematica* у настави математике у високошколској установи. Примена овог програма у настави математике је повећавала мотивацију одређеног броја студената и навела их да самостално користе овај програм истражујући решења одређених математичких проблема.

Многи од горе наведених програма имају могућности цртања графика функције, рачунања извода, решавања једначина и других операција неопходних за анализу тока функције. Међутим, да би се добила комплетна анализа тока функције, неопходно је написати одговарајући софтвер у неком од поменутих програма.

2.2. Ограничења за примену информационих технологија у настави математике

Нажалост, поред свих предности које доноси примена информационих технологија у настави математике, постоје и нека ограничења за њихову активну примену: Недовољно познавање информационих технологија од стране наставника, слаба развијеност тренинга за наставнике из области примене информационих технологија у настави, ограничена техничка подршка, недостатак адекватне опреме, обимно градиво које треба прећи у одређеном временском периоду, што оставља мало времена и простора за примену информационих технологија у настави математике и др., [2], [3]. Према [8], наставни планови и програми су често насписани у традиционалном облику, те наставници немају много простора за примену информационих технологија. Из тог разлога се дешава да се рачунарске лабораторије, иако су доступне и добро опремљене, ретко користе за наставу из предмета који нису директно из области информационих технологија.

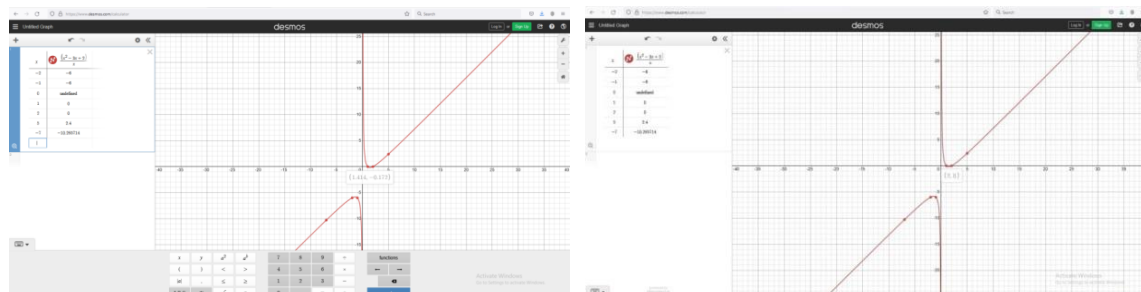
2.3. Софтвери за испитивање тока и цртање графика функције

На интернету се могу наћи неки јавно доступни софтвери који поред цртања графика функције дају и неке податке о анализи тока функције. Један од њих је *Graphing calculator*, [9]. Слика 1 лево приказује рад у овом софтверу. Као што можемо видети, овај софтвер поред цртања графика функције, приказује и вредности по једне екстремне тачке, али само када се приближимо мишем положају поменуте тачке. Међутим, уколико функција има више екстрема,

КОНФЕРЕНЦИЈЕ СА МЕЂУНАРОДНИМ УЧЕШЋЕМ

38. Конференција одржавалаца Србије и 1. Конференција напредне технологије у функцији развоја привреде, Врњачка Бања, 01.06. – 03.06. 2022. године

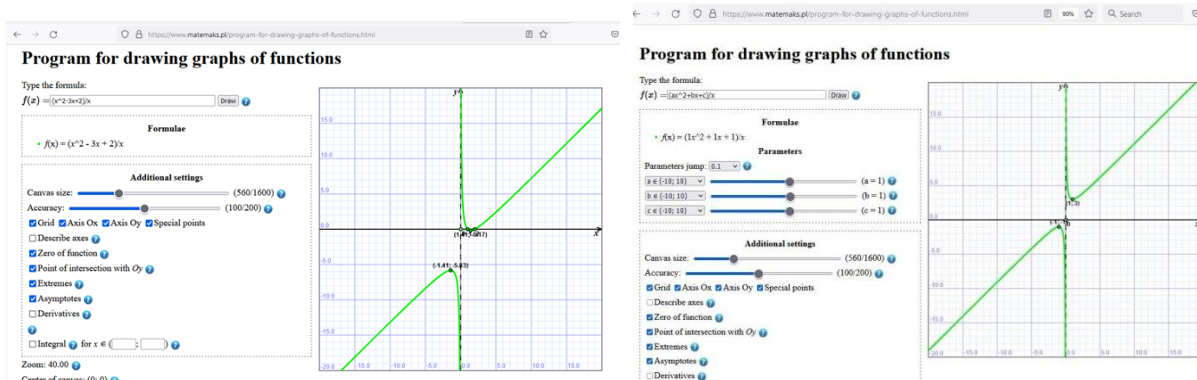
програм приказује само онај екстрем на који показује курсор миша. Слично, програм може приказати и нуле функције, али опет само ону нулу функције на коју тренутно показује курсор миша, Слика 1 десно. Поред екстрема и нула функције, овај програм не испишује остале податке тока функције у класичном слимслу, већ даје таблицу вредности функције за $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Кориснику је омогућено да преко тастатуре у таблицу унесе додатне произвољне вредности променљиве x , а вредност функције у се аутоматски уписује у таблицу, Слика 1 лево.



Слика 1 – Graphing calculator, [9], екстрем (лево) и нула функције (десно)

Нешто детаљнији софтвер *Program for drawing graphs of functions* је доступан на адреси [10]. Овај софтвер омогућава цртање графика функције уз исписивање нула функције, екстрема, пресека са y осом, као и исцртавања вертикалне асимптоте. Овај програм међутим не испишује функцију асимптоте, нити испишује друге вртсе асимптота. Слика 2 приказује график функције $y = \frac{(x^2 - 3x + 2)}{x}$, која поред вертикалне асимптоте има и косу асимптоту $y = x - 3$. Као што можемо видети, она на овом графику није учртана. Такође, у овом случају су нуле функције и екстремии јако близу на графику, па се бројеви преклапају и нечитљиви су. Оно што је предност овог софтвера јесте што омогућава испис функција са параметрима, као нпр. $y = \frac{(ax + bx + c)}{x}$, Слика 2 (десно). У том случају се појављују клизачи за параметре, помоћу којих се могу мењати вредности. У овом програму такође постоји и одговарајуће корисничко упутство, како би корисници сазнали у којој форми се уносе формуле функција, Слика 3.

Међутим, ни *Program for drawing graphs of functions* ни *Graphing calculator* се не баве испитивањем знака функције, интервалима монотоности, конвексношћу и конкавношћу функције, превојним тачкама и др.



Слика 2 – Program for drawing graphs of functions, [10]: конкретна функција (лево) и функција са параметрима (десно)

Available operators

Operator	Function	Example	Example with parameter
+	addition	2x+3	ax+b
-	subtraction	2x-3	ax-b
*	multiplication	2*x	a*x
/	division	3/x	a/x
^	exponentiation	x^3	a(x-b)^4+c
sqrt()	roots	sqrt(2x)	sqrt(ax)-b
*	absolute value	x+5 -4	x-p -q
log()	the natural logarithm	log(x)	log(ax)-b
sin()	sine	sin(x^2)	a*sin(bx)+c
cos()	cosine	cos(3x-1)	a*cos(bx-p)+q
tg()	tangent	tg(x)	tg(x/a)
ctg()	cotangent	3ctg(x/10)	a*ctg(x/b)

Слика 3 – Упутство за писање формула функција у Program for drawing graphs of functions, [10]

Управо овај проблем, као и проблеми са којима се наставници математике суочавају при покушајима да оплемене наставу применом информационих технологија је била мотивација за израду софтвера за испитивање тока и цртање графика функције у програмском пакету *Mathematica*. Област испитивања тока и цртања графика функција је изабрана јер је у питању сложенији проблем који се састоји из низа корака, а такође и зато што се ова област изучава и у средњим школама и на факултетима, односно високим школама. Програмски пакет *Mathematica* је изабран за реализацију софтвера јер нуди бројне уграђене функције које одрађују поједине кораке у испитивању тока и цртању графика функција. Међутим, неке функционалности се морају додатно испрограмирати. Да би наставницима било атрактивније да прихвате ову технологију у настави математике, креиран је програм који решава комплетан проблем испитивања тока и цртања графика функција, и на екрану исписује резултате у оном облику у којем се то од ученика очекује приликом решавања задатака из ове области. Софтвер је још увек у фази развоја, а по завршетку тестирања ће бити објављен на интернету, тако да га корисници могу користити у току наставе. Софтвер је детаљније престављен у трећем поглављу.

2.4. Програмски пакет *Mathematica* и његове могућности у области испитивања тока и цртања графика функција

Као што је већ напоменуто, софтвер за анализу тока и цртање графика функције се развија у програмском пакету *Wolfram Mathematica*. Овај програм није бесплатан, али постоји опција бесплатаног коришћења на облаку уз претходну регистрацију, [11]. *Mathematica* нуди бројне уграђене функције за решавање разних математичких проблема. Посебна погодност лежи у чињеници да у овом програму може и да се програмира. Управо то нам омогућава развој софтвера који корак по корак врши анализу тока функције баш онако како се то од ученика и студената очекује, те да тек на крају анализе исцртава график претходно анализираних функција. Бројне уграђене функције нам скраћују време програмирања. Наведимо неке од њих:

Функција $D[f[x], x]$ омогућава израчунавање извода функције, [12]. Слика 4 приказује израчунавање првог (лево) и другог (десно) извода функције $y = \frac{(x^2-3x+2)}{x}$. Израчунавање првог и другог извода функције, као и њихових нула и знака је неопходно ради одређивања интервала монотонности, екстрема, конвексности, конкавности и превојних тачака функције.

```
In[4]= Simplify[D[(x^2-3 x+2)/x, x]]
Out[4]= 1 - 2/x^2

In[5]= Simplify[D[(x^2-3 x+2)/x, {x, 2}]]
Out[5]= 4/x^3
```

Слика 4 – Mathematica: Израчунавање првог (лево) и другог (десно) извода функције

38. Конференција одржавалаца Србије и 1. Конференција напредне технологије у функцији развоја привреде, Врњачка Бања, 01.06. – 03.06. 2022. године

Још једна од изузетно корисних уграђених функција је функција која омогућава одређивање асимптота функција. У питању је `ResourceFunction["Asymptotes"][expr,x,y]`, која омогућава одређивање свих асимптота функције `expr`. Постоји и варијанта ове функције `ResourceFunction["Asymptotes"][expr,x,y,type]` са додатним улазним параметром `type` која омогућава да прецизирамо тип асимптоте коју тражимо, [13].

```
In[40]:= asimp tota = ResourceFunction["Asymptotes"][(x^2 - 3 x + 2) / x, x, y]
In[41]:= asimp tota
Out[41]:= <|Vertical -> {{y -> +/- infinity, x -> 0}}, Oblique -> {{y -> -3 + x, x -> +/- infinity}}|>
```

Слика 5 – Уграђена функција у програмском пакету *Mathematica* за одређивање свих асимптота функције

```
In[42]:= asimp totaVertikalna = ResourceFunction["Asymptotes"][(x^2 - 3 x + 2) / x, x, y, "Vertical"]
In[43]:= asimp totaVertikalna
Out[43]:= {{y -> +/- infinity, x -> 0}}
```

Слика 6 – Уграђена функција у програмском пакету *Mathematica* са параметром за одређивање вертикалних асимптота функције

```
In[33]:= asimp totaKosa = ResourceFunction["Asymptotes"][(x^2 - 3 x + 2) / x, x, y, "Oblique"]
In[34]:= asimp totaKosa
Out[34]:= {{y -> -3 + x, x -> +/- infinity}}
```

Слика 7 - Уграђена функција у програмском пакету *Mathematica* са параметром за одређивање косих асимптота функције

```
In[38]:= asimp totaHorizontalna = ResourceFunction["Asymptotes"][(x^2 - 3 x + 2) / x, x, y, "Horizontal"]
In[39]:= asimp totaHorizontalna
Out[39]:= {}
```

Слика 8 - Уграђена функција у програмском пакету *Mathematica* са параметром за одређивање хоризонталних асимптота функције

Слика 5 приказује пример примене ове функције за одређивање свих асимптота функције $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$. Следи приказ примене ове функције са параметрима који издвајају редом вертикалну (Слика 6), косу (Слика 7) и хоризонталну асимптоту (Слика 8). Као што видимо, у овом случају нема хоризонталне асимптоте, те је резултат празан скуп.

Mathematica поседује и уграђену функцију за цртање графика функција са бројним параметрима и опцијама који се могу користити. Основна варијанта ове функције је `Plot[f,{x,xmin,xmax}]`, где `xmin` и `xmax` предтсваљају границе интервала за исцртавање функције, [14].

Наравно, све ове функције скраћују писање кода, али нису саме по себи довољне да бисмо добили програм који приказује комплетну анализу тока и график функције.

3. СОФТВЕР ЗА АНАЛИЗУ ТОКА И ЦРТАЊЕ ГРАФИКА ФУНКЦИЈА

Софтвер за испитивање тока и цртање графика функције је осмишљен тако да следи кораке у испитивању тока функције који се у току наставе захтевају од ученика, односно студената, а то су: Одређивање домена, парности, пресека графика функције са у осом, асимптота, нуле и знака, првог извода, интервала монотонности, екстрема, другог извода, интервала конвексности и конкавности, превојних тачака, као и цртање графика функције. Поред тога, знак функције, знак првог извода, као и знак другог извода се приказују табеларно.

```

ispitivanjeTokaFunkcije[funkcija_] := Module({},
  Print["Испитивање тока и цртање графика функције ", funkcija];
  DomenFunkcije[funkcija];
  Parnost[funkcija];
  PresekSav[funkcija];
  Print[" "];
  Print["Асимптоте!"];
  Asimptota[funkcija, Vertical, "Вертикална асимптота"];
  Asimptota[funkcija, Horizontal, "Хоризонтална асимптота"];
  Asimptota[funkcija, Oblique, "Коса симптота"];
  asimptote = AsimptotePlot[funkcija];
  Print[" "];
  Print["Нуле и знак функције"];
  NuleFunkcije[funkcija];
  Tablica[funkcija, 0.1, 0];
  Print[" "];
  Print["Интервали монотоности и екстремне вредности"];
  Tablica[funkcija, 0.1, 1];
  Print[" "];
  Print["Конвексност, конкавност и превојне тачке"];
  Tablica[funkcija, 0.1, 2];
  Print[" "];
  Print["График функције"];
  Plot[{funkcija, asimptote}, {x, -10, 10}, PlotStyle -> {Blue, {Red, Dashed, Thick}}, ExclusionsStyle -> {{Red, Dashed, Thick}, PointSize -> 0.0}, AxesLabel -> {"x", "y"},
  AxesStyle -> Arrowheads[{0.0, 0.04}]]
]

```

Слика 9 - Главна процедура програма у којој се позивају друге процедуре

Слика 9 приказује главну процедуру програма у којој се позивају друге процедуре (има их за сада укупно десет) које извршавају одређене делове програма, а поклапају се поклапају са горе наведеним ставкама које програм заправо треба да садржи. Слика 10 приказује једну од поменутих процедура која служи за одређивање екстремних вредности функције.

```

Ekstremi[niz_, funkcija_, eps_] := Module[{l, minimumi, maksimumi, pom},
  minimumi = {}; maksimumi = {};
  d1 = D[funkcija, {x, 1}];
  l = FunctionDomain[funkcija, x];
  For[i = 1, i ≤ Length[niz], i++, pom = x /. niz[[i]];
    If[{(d1 /. x -> (pom - eps)) * (d1 /. x -> (pom + eps)) < 0} && (Reduce[{l, x == pom}] == (x == pom)),
      If[(d1 /. x -> (pom - eps)) < 0,
        AppendTo[minimumi, Min("< ToString[pom] <> ", "< ToString[funkcija /. x -> pom] <> ")"],
        AppendTo[maksimumi, Max("< ToString[pom] <> ", "< ToString[funkcija /. x -> pom] <> ")"]
      ]
    ]
  ]
  If[maksimumi ≠ {}, Print["Максимуми:", maksimumi], Print["Максимуми: нема"]];
  If[minimumi ≠ {}, Print["Минимуми:", minimumi], Print["Минимуми: нема"]]
]

```

Слика 10-Процедура за одређивање екстремних вредности функције

Приказани софтвер се још увек налази у фази развоја, а по завршетку његовог развоја постоји могућност његове објаве на интернету, **Error! Reference source not found.** На тај начин би овај софтвер био доступан заинтересованим наставницима и ученицима, односно студентима.

Главна процедура програма се поприлично једноставно покреће јер садржи само један улазни параметар, а то је функција чији ток се испитује, Слика 11 - Слика 13.

КОНФЕРЕНЦИЈЕ СА МЕЂУНАРОДНИМ УЧЕШЋЕМ

38. Конференција одржавалаца Србије и 1. Конференција напредне технологије у функцији развоја привреде, Врњачка Бања, 01.06. – 03.06. 2022. године

```

In[1]: IspitivanjeTokaFunkcije[(x^2-3x+2)/x]

Испитивање тока и цртање графика функције  $\frac{2-3x+x^2}{x}$ 

Домен функције:  $x < 0$  или  $x > 0$ 
Парност: Функција није ни парна ни непарна
Функција нема пресек са у осом.

Асимптоте
Вертикална асимптота:  $\{y \rightarrow \pm\infty, x \rightarrow 0\}$ 
Хоризонтална асимптота: Нема
Коса симптота:  $\{y \rightarrow -3+x, x \rightarrow \pm\infty\}$ 

Нуле и знак функције
Нуле функције:
(1,0)
(2,0)

Таблица
x      (-∞,0.)   (0.,1.)   (1.,2.)   (2.,∞)
y      -         +         -         +

y>0 за  $x \in (0.,1.) \cup (2.,\infty)$ 
y<0 за  $x \in (-\infty,0.) \cup (1.,2.)$ 
    
```

Слика 11 - Пример извршења програма – део 1

```

Интервали монотоности и екстремне вредности
y' = 1 - 2/x^2

Таблица
x      (-∞,-1.41421)  (-1.41421,1.41421)  (1.41421,∞)
y'     +             -                     +

у монотono расте за  $x \in (-\infty,-1.41421) \cup (1.41421,\infty)$ 
у монотono опада за  $x \in (-1.41421,1.41421)$ 

Максимуми: {Max(-1.41421,-5.82843)}
Минимуми: {Min(1.41421,-0.171573)}

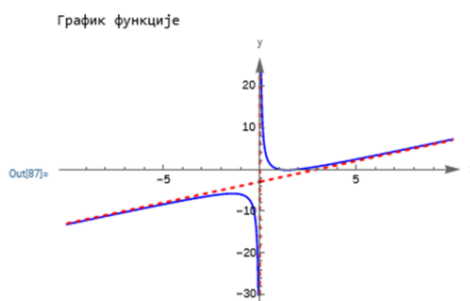
Конвексност, конкавност и превојне тачке
y'' = 4/x^3

Таблица
x      (-∞,0.)   (0.,∞)
y''    -         +

у је конвексна за  $x \in (0.,\infty)$ 
у конкавна за  $x \in (-\infty,0.)$ 

Превојне тачке: нема
    
```

Слика 12 - Пример извршења програма – део 2



Слика 13 - Пример извршења програма – део 3

4. ЗАКЉУЧАК

Софтвер за испитивање тока и цртање графика функције се развија са идејом да наставницима и ученицима/студентима олакша предавање односно савладавање ове области. Стога прати кораке сличне онима из наставног процеса. Софтвер је још увек у фази развоја. За

38. Конференција одржавалаца Србије и 1. Конференција напредне технологије у функцији развоја привреде, Врњачка Бања, 01.06. – 03.06. 2022. године

сада у испитивање функција нису укључене функције које садрже тригонометријске функције. Недостаје још једна процедура која би решила и овај проблем. Поменута процедура би требала да одреди периодичност, и усвоји неки критеријум у ком интервалу на x оси би се испитивао ток и цртао график функције. Поред тога, у плану је да се састави и адекватно корисничко упутство које би олакшало рад оним корисницима који нису обучени за рад у програмском пакету *Mathematica*. Софтвер мора проћи и кроз фазу тестирања, и на крају да се објави на интернету.

5. ЛИТЕРАТУРА

- [1] Glimm J. G.; *Mathematical Sciences, Technology, and Economic Competitiveness*, Board on Mathematical Sciences, Commission on Physical Sciences, Mathematics, and Applications, National Academy Press, Washington, D.C. (1991)
- [2] Das, K.; *Role of ICT for Better Mathematics Teaching*: Shanlax International Journal of Education, Vol 7, Issue 4, September 2019, pp. 19-28.
- [3] Zakaria N. A.; Khalid F.: *The Benefits and Constraints of the Use of Information and Communication Technology (ICT) in Teaching Mathematics*, Creative Education, Vol.7, No.11, July 2016, pp. 1537-1544
- [4] Kumar A., Kumaresan S.; *Use of Mathematical Software for Teaching and Learning Mathematics*, ICME 11, Mexico, (2008) Proceedings, pp. 373-388, https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/About_ICMI/Publications_about_ICMI/ICME_11/Kumar_Kumaresan.pdf
- [5] Williams A.; *5 Best Mathematical Software in 2022*, <https://fixthephoto.com/best-mathematical-software.html>, (2022)
- [6] *Top 12 free mathemtics programs in 2021*, <https://www.allassignmenthelp.com/blog/free-mathematics-software/>, (2022)
- [7] Крунић Т.; *Примена математичког софтвера у настави математике у струковном образовању – студија случаја*, 5. Међународна конференција Управљање знањем и информатика, Копаоник, (2019), стр. 33-40, <http://kmi.vtsns.edu.rs/wp-content/uploads/2019/03/Zbornik-KMI-2019.pdf>
- [8] Agyei D. D., Voogt J.; *ICT use in the teaching of mathematics: Implications for professional development of pre-service teachers in Ghana*, Education and Information Technologies, December 2011, 16 (4), pp. 423-439
- [9] *Graphing calculator*, <https://www.desmos.com/calculator>, (2022)
- [10] *Program for drawing graphs of functions*, <https://www.matemaks.pl/program-for-drawing-graphs-of-functions.html>, (2022)
- [11] Wolfram Mathematica online, Bring Mathematica to life on the cloud, <https://www.wolfram.com/mathematica/online/>, (2021)
- [12] Derivative ('), Wolfram language & system documentation center, <https://reference.wolfram.com/language/ref/Derivative.html>, (2022)
- [13] Asymptotes, Wolfram function repository, <https://resources.wolframcloud.com/FunctionRepository/resources/Asymptotes>, (2022)
- [14] Plot, Wolfram language & system documentation center, <https://reference.wolfram.com/language/ref/Plot.html>, (2022)